Résultant et discriminant

démêler les racines du problème

François Bernard

Pi-Day

14 mars 2024

Introduction

$\rightarrow$ Un polynôme est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

où X est une indéterminée et les $a_i \in \mathbb{C}$ sont appelés *coefficients* de P.

Introduction

→ Un polynôme est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

où X est une indéterminée et les $a_i \in \mathbb{C}$ sont appelés *coefficients* de P.

→ Un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ est appelé *racine* de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple

Le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une racine du polynôme $X^2 - X - 1$.

Le coeur de la géométrie algébrique consiste à étudier les racines communes de plusieurs polynômes à plusieurs variables.

Résultant

Résultant

Soient

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\text{et} \qquad Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0$$

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

Résultant

Soient
$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$\text{et} \qquad Q(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_0$$

On veut savoir si le système
$$\begin{cases} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \\ b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

$\rightarrow$ On considère $\mathrm{Res}_X(P, Q) \in \mathbb{C}$ le résultant de P et Q.

Proposition

$Res_X(P, Q) = 0$ si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$.

Calcul du résultant

Considérons la *matrice de Sylvester* de taille $(m+n) \times (m+n)$

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & \vdots & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & b_1 & & & b_m \\ a_0 & & & a_{n-1} & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & b_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Le résultant est donné par le *déterminant* de cette matrice.

$\rightarrow$ On effectue un pivot de Gauss, puis on multiplie les éléments sur la diagonale.

Exemple

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} x^5 + 2x^3 + 4 = 0 \\ x^4 + x + 7 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Exemple

On veut savoir si le système

$$\begin{cases} x^5 + 2x^3 + 4 = 0 \\ x^4 + x + 7 = 0 \end{cases}$$

admet une solution.

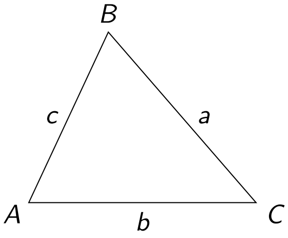
On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{127}{11} & \frac{-1}{11} & -2 & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{885}{127} & \frac{39}{127} & \frac{24}{127} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2061}{295} & \frac{111}{295} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1631}{229} \end{vmatrix}$$

Formule de Héron

Formule de Héron

Soit ABC un triangle non plat du plan. On désire exprimer son aire $\mathcal{A}$ en fonction des longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ de ses côtés.

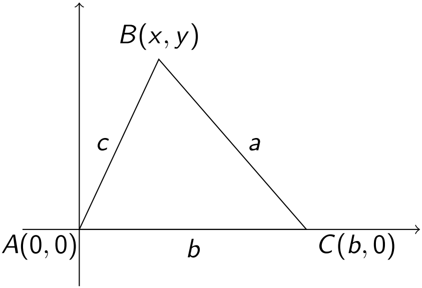


Théorème (Formule de Héron)

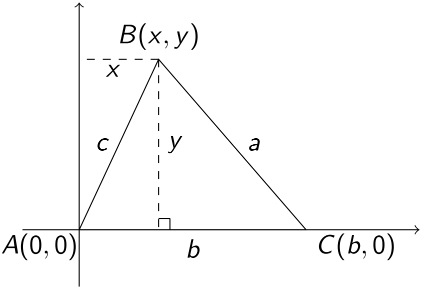
En notant $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre de ABC, on a

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Formule de Héron

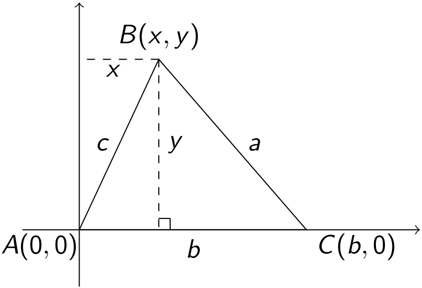


Formule de Héron



$\rightarrow$ La formule de l'Aire nous donne $\mathcal{A} - \frac{1}{2}by = 0$.

Formule de Héron



$\rightarrow$ La formule de l'Aire nous donne $\mathcal{A} - \frac{1}{2}by = 0$.

$\rightarrow$ Le théorème de Pythagore nous donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - c^2 = 0 \\ (b - x)^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Formule de Héron

On pose

$$\begin{aligned} & P(X) = X^2 + y^2 - c^2 \\ \text{et} \quad & Q(X) = (b - X)^2 + y^2 - a^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ On sait que x est une racine commune à P et Q.

Formule de Héron

On pose

$$\begin{aligned} & P(X) = X^2 + y^2 - c^2 \\ \text{et} \quad & Q(X) = (b - X)^2 + y^2 - a^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ On sait que x est une racine commune à P et Q.

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_X(P, Q) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2b & 1 \\ y^2 - c^2 & 0 & b^2 + y^2 - a^2 & -2b \\ 0 & y^2 - c^2 & 0 & b^2 + y^2 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= 4b^2y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Formule de Héron

On pose

$$\begin{aligned} & W(Y) = 4b^2Y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \\ \text{et} \quad & V(Y) = -\tfrac{1}{2}bY + \mathcal{A} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ On sait que y est une racine commune à W et V.

Formule de Héron

On pose

$$\begin{aligned} W(Y) &= 4b^2Y^2 + a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \\ \text{et} \quad V(Y) &= -\tfrac{1}{2}bY + \mathcal{A} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ On sait que y est une racine commune à W et V.

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_Y(W,V) &= \tfrac{1}{4}b^4(16\mathcal{A}^2 - (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)) \\ &= \tfrac{1}{4}b^4(16\mathcal{A}^2 - 2p \times 2(p-c) \times 2(p-b) \times 2(p-a)) \\ &= 8b^4(\mathcal{A}^2 - p(p-c)(p-b)(p-a)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Au final

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Intersection de surfaces

Intersection de surfaces

Le résultant permet d'éliminer une variable quand deux figures géométriques s'intersectent.

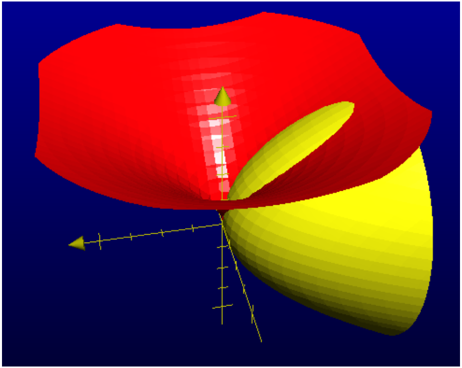


Figure – En rouge $P(x, y, z) = y^2 + x^2 - z^3 = 0$
En jaune $Q(x, y, z) = y + x^2 + z^2 = 0$

Ici, par exemple, $\mathrm{Res}_Y(P, Q) = (x^2 + z^2)^2 - z^3 - x^2 = 0$ sur l'intersection.

Discriminant

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_i \in \mathbb{C}$. *Alors il existe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1)\ldots(X - \alpha_n)$$

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_i \in \mathbb{C}$. *Alors il existe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$P(X) = a_n (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n)$$

$\rightarrow$ On cherche à savoir si les racines sont distinctes.

Discriminant

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_i \in \mathbb{C}$. *Alors il existe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$P(X) = a_n (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n)$$

$\rightarrow$ On cherche à savoir si les racines sont distinctes.

Définition

On considère le polynôme dérivé

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$$

Remarque :

$$\begin{aligned}(u_1 u_2 u_3)' &= u_1'(u_2 u_3) + u_1 (u_2 u_3)' \\ &= u_1' u_2 u_3 + u_1 (u_2' u_3 + u_2 u_3') \\ &= u_1' u_2 u_3 + u_1 u_2' u_3 + u_1 u_2 u_3'\end{aligned}$$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

De manière générale :

$$P'(\alpha_i) = 0 \text{ si et seulement si } \exists j \text{ tel que } \alpha_i = \alpha_j.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Les racines de P sont distinctes.*
- *P et P' n'ont pas de racines communes.*
- *$Res_X(P, P') \neq 0$.*

Discriminant

Si $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$, alors

$$P'(X) = (X - \alpha_2)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_3) + (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

Ainsi, par exemple, $P'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$

De manière générale :

$$P'(\alpha_i) = 0 \text{ si et seulement si } \exists j \text{ tel que } \alpha_i = \alpha_j.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Les racines de P sont distinctes.*
- *P et P' n'ont pas de racines communes.*
- *$Res_X(P, P') \neq 0$.*

$\rightarrow$ On note $\mathrm{Disc}(P) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \mathrm{Res}_X(P, P')$ le *discriminant* de P.

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\mathrm{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\mathrm{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

On effectue le pivot de Gauss et on obtient

$$\mathrm{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{vmatrix} = a \times (-b) \times (b - \frac{4ac}{b}) = -a(b^2 - 4ac)$$

Exemple en degré 2

Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P'(X) = 2aX + b$.

$$\mathrm{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

On effectue le pivot de Gauss et on obtient

$$\mathrm{Res}_X(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{vmatrix} = a \times (-b) \times (b - \frac{4ac}{b}) = -a(b^2 - 4ac)$$

Donc P admet une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$.

Exemples en degré 3 et 4

Pour $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\mathrm{Disc}(P) = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$$

Exemples en degré 3 et 4

Pour $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\mathrm{Disc}(P) = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$$

Pour $P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, on a

$\mathrm{Disc}(P) = 256a^3e^3 - 128a^2e^2c^2 - 4b^3d^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 192a^2bde^2 - 27b^4e^2 - 6ab^2d^2e + 144ab^2ce^2 + 144a^2cd^2e - 80abc^2de + 18b^3cde + 18abcd^3 + b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 27a^2d^4$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\mathrm{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\mathrm{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

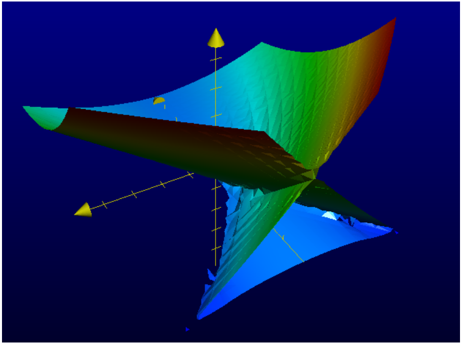


Figure – La surface $\mathrm{Disc}(P) = 0$

Cas particulier en degré 4

Pour $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$, on a

$$\mathrm{Disc}(P) = 16c(16c^2 - 8ca^2 + a^4 + 9ab^2) - b^2(4a^3 + 27b^2)$$

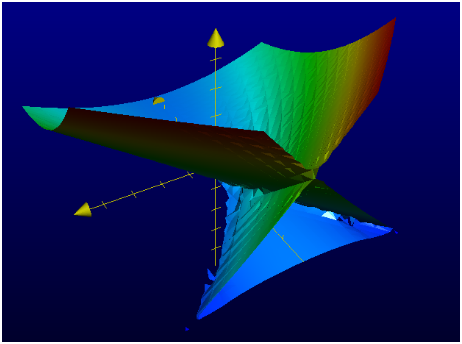


Figure – La surface $\mathrm{Disc}(P) = 0$

Merci pour votre attention !